PREMIER PROBLÈME

I – Solutions d'une équation différentielle

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère l'équation différentielle (E) : $\left(1+x^2\right) y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \dfrac{\ln x + \lambda}{1+x^2}$ et on note (C_λ) sa courbe représentative dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- **a)** Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\alpha > 0$. Montrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ).
- **b)** Montrer que pour tout réel λ, la fonction f_λ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **c)** Montrer que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.
- **d)** Etudier les variations de g_λ. On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$; cette solution sera notée m_λ.
- **e)** Dresser le tableau de variations de f_λ. On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.
- **f)** Représenter sur un même graphique les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1). On donnera des valeurs approchées de m_{-1} et m_0 à 10^{-2} près en précisant la méthode utilisée, ainsi que la valeur *exacte* de m_1.

3) Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

- **a)** Montrer que pour λ assez grand, on a : $\dfrac{1}{\lambda} \leqslant m_\lambda \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
- **b)** En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

II – Etude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par : $\forall x > 0 \quad F(x) = \displaystyle\int_1^x f_0(t)\, dt = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$.

La courbe représentative de F sera notée Γ.

1)
- **a)** Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b)** Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **c)** Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- **d)** Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3)
- **a)** Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$.
  Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \operatorname{Arctan} x \ln x - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,dt$.

c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.

Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?

d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on dire de Γ au point d'abscisse 0 ?

4) Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln t\,dt$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, une majoration de $\left| F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.

d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.

e) Donner, en *détaillant la méthode utilisée*, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5) Tracer l'allure de la courbe Γ. On précisera le point d'inflexion.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée (e_1, e_2, e_3).
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.
Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) Soient $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$ et $e'_3 = (1,1,-2)$.

a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).

c) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

3) **a)** La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$ (on convient que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad M^0 = I_3$).

d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

e) Montrer que la suite $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

f) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $B = S - 2I_3$.

a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$ (on pourra, après justification, utiliser la formule du binôme de Newton).

c) Comparer avec le résultat de la question 3).

5) L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose : $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1) Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u \circ s = s \circ u = f$.

2) Soit (e_1'', e_2'', e_3'') la famille obtenue en normant les vecteurs e_1', e_2' et e_3' de la question 2) de la première partie.

a) Montrer que (e_1'', e_2'', e_3'') est une base orthonormale directe.

b) Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u.

3) **a)** Exprimer la matrice de s dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') en fonction de S'.

b) En déduire la matrice de f dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').

4) **a)** Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?

b) Soit $P = \text{Vect}\,(e_2'', e_3'')$.

i) Montrer que $f(P) = P$.

ii) Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P, $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaîtra.

5) On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

i) Montrer que le vecteur $g(e_1'')$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?

ii) Soit M la matrice de g dans la base (e_1'', e_2'', e_3''). Montrer que M commute avec $(S')^3$.

iii) En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').

c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?