CORRIGE

Premier Problème

Première partie

1) On peut utiliser la méthode usuelle de résolution d'une équation différentielle linéaire ou remarquer que :
$(E) \iff \dfrac{d}{dx}\left((1+x^2)y\right) = \dfrac{1}{x} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ (1+x^2)y = \ln x+\lambda \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ y = \dfrac{\ln x+\lambda}{1+x^2}$.
Donc $\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x\longmapsto \dfrac{\ln x+\lambda}{1+x^2},\ \lambda\in\mathbb{R}.}$

2) a) Pour $\alpha>0$, l'équation $\dfrac{\ln\alpha+\lambda}{1+\alpha^2}=\beta$ d'inconnue λ a une solution et une seule : $\lambda=(1+\alpha^2)\beta-\ln\alpha$.
Ceci équivaut à $\boxed{\text{l'existence et l'unicité d'une courbe } (C_\lambda) \text{ passant par } M}$.

b) La fonction ln est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, de même que la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{1+x^2}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). On en déduit que $\boxed{f_\lambda \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme produit de fonctions qui le sont.

c) La fonction f_λ vérifiant l'équation différentielle (E), on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ (1+x^2)f'_\lambda(x)+2xf_\lambda(x)=\dfrac{1}{x}$.
Donc pour $x>0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $\dfrac{1}{x}-2xf_\lambda(x)=\dfrac{1+x^2-2x^2(\ln x+\lambda)}{x(1+x^2)}$ et le dénominateur est positif. On en déduit que $\boxed{f'_\lambda(x) \text{ est du signe de } g_\lambda(x)=1+x^2-2x^2(\ln x+\lambda)}$.
On pouvait également dériver directement f_λ.

d) La fonction g_λ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour les mêmes raisons que f_λ. On a :
$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ g'_\lambda(x)=-4x(\ln x+\lambda)$ qui est du signe opposé à celui de $\ln x+\lambda$, d'où le tableau de variations de g_λ :

x	0		$e^{-\lambda}$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$g_\lambda(x)$	1	$\nearrow$	$1+e^{-2\lambda}$	$\searrow$	$-\infty$

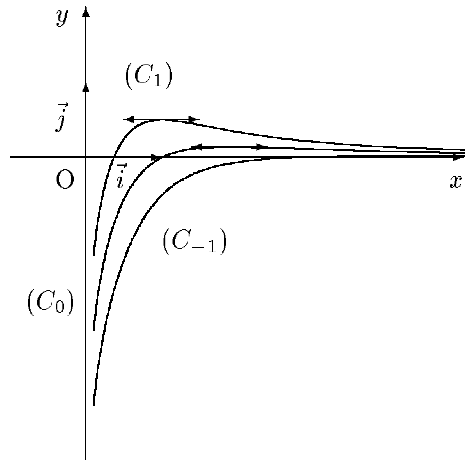
La fonction g_λ étant strictement croissante sur $\left]0,e^{-\lambda}\right]$ avec $\lim\limits_0 g_\lambda=1$, l'équation $g_\lambda(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle. Par contre, la restriction de g_λ à $\left[e^{-\lambda},+\infty\right[$ étant continue strictement décroissante de $\left[e^{-\lambda},+\infty\right[$ dans $\left]-\infty,1+e^{-2\lambda}\right]$ qui contient 0, l'équation $g_\lambda(x)=0$ admet une et une seule solution sur cet intervalle, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

e) Les deux questions précédentes fournissent le signe de f'_λ sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		m_λ		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2m_\lambda^2}$	$\searrow$	0

On a $\lim\limits_{x\to0+}\ln x=-\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0+}f_\lambda(x)=-\infty}$; de plus, $f_\lambda(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln x}{x^2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f_\lambda(x)=0}$.
Enfin, $g_\lambda(m_\lambda)=0\Longrightarrow \ln m_\lambda+\lambda=\dfrac{1+m_\lambda^2}{2m_\lambda^2}\Longrightarrow \boxed{f_\lambda(m_\lambda)=\dfrac{1}{2m_\lambda^2}}$.

f) On utilise la question précédente pour le tracé. On trouve, par exemple par dichotomie : $m_{-1}\simeq4,59$, $m_0\simeq1,9$ et on a $m_1=1$.
Allure des courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1) :



3) a) Soit $\lambda > 0$. Alors $g_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = 1 + \dfrac{1}{\lambda^2} - 2\,\dfrac{\lambda - \ln\lambda}{\lambda^2}$ et $g_\lambda\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 1 + \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{2\lambda - \ln\lambda}{\lambda}$, donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} g_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 > 0$ et $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} g_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = -1 < 0$. On en déduit que pour λ assez grand, on a $\boxed{\dfrac{1}{\lambda} \leqslant m_\lambda \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}}$.

b) La question précédente assure que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} m_\lambda = 0$ et plus précisément que $-\ln\lambda \leqslant \ln m_\lambda \leqslant -\dfrac{1}{2}\ln\lambda$, donc $\ln m_\lambda = o(\lambda)$ au voisinage de $+\infty$. Or $g_\lambda(m_\lambda) = 0 \Longrightarrow \ln m_\lambda + \lambda = \dfrac{1}{2m_\lambda^2} + \dfrac{1}{2}$. Le membre de gauche est équivalent à λ et celui de droite à $\dfrac{1}{2m_\lambda^2}$, et donc on a bien $\boxed{m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}}$ car $m_\lambda > 0$.

Seconde partie

1) a) f_0 est strictement négative sur $]0,1[$, nulle en 1 et strictement positive sur $]1,+\infty[$. On en déduit (continuité de f_0) que $\boxed{F \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \text{ et nulle en } 1}$.

b) La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il résulte donc des théorèmes du cours que la fonction intégrale $\boxed{F \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ avec } F' = f_0}$.

c) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = f_0(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}}$. On en déduit que F est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

d) On peut intégrer le développement limité de f_0, ou utiliser directement la formule de Taylor-Young : F est clairement 3 fois dérivable en 1 avec $F(1) = 0$, $F'(1) = f_0(1) = 0$, $F''(1) = f_0'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $F^{(3)}(1) = -\dfrac{3}{2}$. D'où $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2 - \dfrac{1}{4}(x-1)^3 + o(x-1)^3}$.

2) Soit $x > 0$. Alors $F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale et on trouve $F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_1^x \frac{-\ln u}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$, d'où $\boxed{F\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(x)}$.

On pouvait également dériver la fonction $x \longmapsto F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3) a) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = (\operatorname{Arctan})'(0) = 1$, donc $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$ en posant $\boxed{\varphi(0) = 1}$.

b) Résulte d'une $\boxed{\text{intégration par parties}}$.

c) On a $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \operatorname{Arctan} x \ln x = 0$. De plus, φ étant prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction intégrale $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,dt$ est continue et tend vers $-\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ (qui est bien définie) lorsque x tend vers 0. On en déduit que F admet une limite finie en 0, égale à $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$, donc que $\boxed{F \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

De plus, d'après le 2), $\boxed{F \text{ admet une limite finie en } +\infty}$, avec $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(0)}$.

d) On peut appliquer le théorème des accroissements finis à F sur un segment $[0, x]$ avec $x > 0$: $\exists c_x \in [0, x]$, $\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = f_0(c_x)$. Or quand x tend vers 0, c_x aussi ; comme $\lim\limits_{0^+} f_0 = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = -\infty$ donc $\boxed{F \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ et, d'après la limite du taux d'accroissement, $\boxed{\Gamma \text{ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse } 0}$.

4) a) A l'aide d'une (légitime) intégration par parties, on obtient $I_k(x) = \left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1} \ln t\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \dfrac{t^k}{k+1}\,dt$, d'où $\boxed{I_k(x) = \dfrac{(k+1)x^{k+1}\ln x + 1 - x^{k+1}}{(k+1)^2}}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$ est la somme des (n+1) premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x^2 \neq 1$, donc est égale à $\dfrac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}$, d'où $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}}$.

c) En remplaçant x par t dans chaque membre de l'égalité précédente, en multipliant par $\ln t$ puis en intégrant entre 1 et x, on obtient $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \dfrac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,dt$.

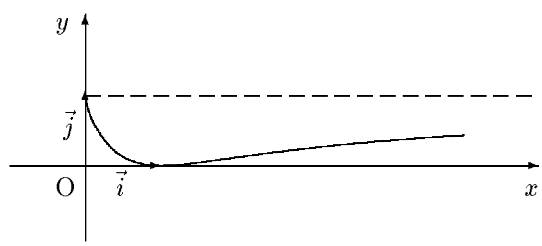
Si $x \in]0, 1[$, on a $\left|(-1)^{n+1} \displaystyle\int_1^x \dfrac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,dt\right| = \displaystyle\int_x^1 \dfrac{t^{2n+2}(-\ln t)}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_x^1 t^{2n+2}(-\ln t)\,dt = I_{2n+2}(x)$.

Donc $\boxed{\left|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x)}$.

d) On remarque que pour tout entier naturel k, I_{2k} a une limite finie en 0, égale à $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$. Il en est de même de F. On fait donc tendre x vers 0 par valeurs supérieures dans l'inégalité du c), et on obtient directement $\boxed{|F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}}$.

e) Pour tout entier naturel n, u_n est une somme de rationnels facile à calculer. Pour avoir une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$, il suffit d'après la question précédente d'avoir $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-2}$, d'où $n \geqslant 4$. On a $u_4 = \dfrac{91369}{99225} \simeq 0,92$, donc $\boxed{F(0) \simeq 0,92 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

5) Les questions précédentes permettent de tracer l'allure de Γ. Le point de coordonnées $(m_0, F(m_0))$ est un point d'inflexion, avec $m_0 \simeq 1,9$ et $F(m_0) \simeq 0,09$.



Second Problème

Première partie

1)

$$\det S = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

$$= \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad (L_2 \to L_2 - L_1, L_3 \to L_3 - L_1)$$

$$= 4 \neq 0$$

Donc S est inversible, donc $\boxed{s \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

2) a) Le déterminant de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

Donc $\boxed{(e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

b) On vérifie que $\begin{cases} s(e'_1) = e'_1 \\ s(e'_2) = 2e'_2 \\ s(e'_3) = 2e'_3 \end{cases}$ donc $\boxed{S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ et, en notant P_1 la matrice de passage de la base canonique à la base (e'_1, e'_2, e'_3), on a $\boxed{S' = P_1^{-1} S P_1}$.

c) Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (S')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et on peut en déduire une expression de S^n par la formule $\boxed{S^n = P_1 (S')^n P_1^{-1}}$ (récurrence sur n).

3) a) La matrice S n'étant pas scalaire, $\boxed{\text{la famille } (I_3, S) \text{ est libre}}$.

b) Par le calcul (on peut utiliser S'), on trouve $\boxed{S^2 = -2I_3 + 3S}$; les coefficients de la combinaison linéaire sont uniques car la famille (I_3, S) est libre.

c) On montre la propriété par récurrence sur n. Au rang 0, on a $S^0 = I_3 = a_0 I_3 + b_0 S$ avec $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$.
Supposons maintenant la propriété vérifiée au rang n : $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \quad S^n = a_n I_3 + b_n S$.
Alors $S^{n+1} = S^n S = a_n S + b_n S^2 = -2b_n I_3 + (a_n + 3b_n) S$; la propriété est donc vérifiée au rang $n+1$ en posant $\begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$.
On a ainsi montré par récurrence que la propriété était valable pour tout entier naturel n.
$\boxed{\text{L'unicité résulte de l'indépendance linéaire de la famille } (I_3, S)}$.

d) On a trouvé précédemment que $\boxed{a_0 = 1}$, $\boxed{b_0 = 0}$ et que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}}$. On vérifie alors que $\boxed{a_1 = 0}$ et $\boxed{b_1 = 1}$, ce qui n'a rien d'étonnant.

e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} + b_{n+1} = -2b_n + a_n + 3b_n = a_n + b_n$, donc $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante}}$.
Comme $a_0 + b_0 = 1$, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n + b_n = 1}$.
De même, $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} + 1 = a_n + 3b_n + 1 = (a_n + b_n) + 2b_n + 1 = 2(b_n + 1)$, donc :
$\boxed{\text{la suite } (b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison 2}}$. Comme $b_0 + 1 = 1$, on en déduit que :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n + 1 = 2^n}$.

f) Il résulte de la question précédente que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n = 2 - 2^n \\ b_n = 2^n - 1 \end{cases}}$.

4) a) On trouve $B = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; alors $B^2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -B$, d'où par une récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = (-1)^{n+1}B}$ et $\boxed{B^0 = I_3}$.

b) On a $S = 2I_3 + B$; or $2I_3$ et B commutent ($2I_3B = B(2I_3) = 2B$), donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k} = 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{n-k} B^k = 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{n-k}(-1)^{k+1}\right) B \\ &= 2^n I_3 + \left(2^n - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 2^{n-k}\right) B \\ &= 2^n I_3 + \left(2^n - (2-1)^n\right) B \end{aligned}$$

d'où finalement $\boxed{S^n = 2^n I_3 + (2^n - 1)B}$.

c) On remplace B par $S - 2I_3$ dans la formule précédente, et on obtient $\boxed{S^n = (2^n - 1)S + (2 - 2^n)I_3}$ comme précédemment.

5) S est inversible, donc la question a un sens.

On vérifie (cela résulte de : $S^2 = -2I_3 + 3S$) que $(2^{-1} - 1)S + (2 - 2^{-1})I_3 = \dfrac{3}{2}I_3 - \dfrac{1}{2}S$ est bien l'inverse de S ; une récurrence prouve alors que $\boxed{\text{la formule } S^n = (2^n - 1)S + (2 - 2^n)I_3 \text{ est valable pour tout } n \in \mathbb{Z}}$.

Seconde partie

1) Il vient sans peine $\boxed{U = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}$; U est clairement une matrice orthogonale de déterminant 1, donc $\boxed{\text{u est une rotation vectorielle}}$; enfin, $\boxed{u \circ s} = f \circ s^{-1} \circ s \boxed{= f}$ et on vérifie que $SU = A$, donc $\boxed{s \circ u = f}$.

2) a) Comme (e_1', e_2', e_3') est une base directe (le déterminant dans la base canonique est strictement positif) d'après la première partie, il en est de même de (e_1'', e_2'', e_3'') ; de plus, les vecteurs sont unitaires. On vérifie ensuite qu'ils sont orthogonaux deux à deux.

Finalement, $\boxed{(e_1'', e_2'', e_3'') \text{ est une base orthonormale directe de } \mathbb{R}^3}$.

b) On trouve $\begin{cases} u(e_1'') = e_1'' \\ u(e_2'') = \dfrac{1}{2}(-e_2'' + \sqrt{3}\,e_3'') \\ u(e_3'') = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,e_2'' + e_3'') \end{cases}$ d'où $\boxed{U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}}$; on en déduit immédiatement que $\boxed{u \text{ est la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par } e_1'' \text{ et d'angle de mesure } \dfrac{2\pi}{3}}$.

3) a) Les vecteurs e_1', e_2' et e_3' sont colinéaires respectivement à e_1'', e_2'' et e_3''. Il en résulte : $\boxed{\text{la matrice de } s \text{ dans la base } (e_1'', e_2'', e_3'') \text{ est } S'}$.

b) $\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (e_1'', e_2'', e_3'') \text{ est}}$ $U'S' = S'U'$, c'est-à-dire $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$.

4) a) Le vecteur $xe''_1 + ye''_2 + ze''_3$ est invariant par f si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement si $y = z = 0$. Donc $\boxed{\text{l'ensemble des vecteurs invariants par } f \text{ est } \mathbb{R}e''_1}$.

b) i) $(f(e''_2), f(e''_3)) \in (\text{Vect }(e''_2, e''_3))^2$ donc $f(P) \subset P$. Comme f est inversible, $\dim(f(P)) = \dim P$, donc $\boxed{f(P) = P}$.

ii) g a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base (e''_2, e''_3) ; on en déduit que $\boxed{g \text{ est la composée de l'homothétie de rapport 2 et de la rotation d'angle de mesure } \dfrac{2\pi}{3}}$, le plan Vect (e''_2, e''_3) étant orienté par la donnée du vecteur normal e''_1. Le produit est commutatif.

5) a) $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par définition ; de plus, $\mathcal{C}(f) \neq \varnothing$ car $Id_{\mathbb{R}^3} \in \mathcal{C}(f)$ (condition nécessaire pour que $\mathcal{C}(f)$ soit une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$). Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(g_1, g_2) \in (\mathcal{C}(f))^2$, on a :
$(\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + g_2 \circ f = \lambda f \circ g_1 + f \circ g_2 = f \circ (\lambda g_1 + g_2)$, donc $\lambda g_1 + g_2 \in \mathcal{C}(f)$. On en déduit que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. De plus, avec les notations précédentes, $(g_1 \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f) = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = f \circ (g_1 \circ g_2)$ donc $g_1 \circ g_2 \in \mathcal{C}(f)$; donc $\boxed{\mathcal{C}(f) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

b) i) On a : $f(g(e''_1)) = (f \circ g)(e''_1) = (g \circ f)(e''_1) = g(f(e''_1)) = g(e''_1)$ car e''_1 est invariant par f, donc $\boxed{g(e''_1) \text{ est invariant par } f}$. La question 4)a) assure alors que $\boxed{g(e''_1) \text{ est colinéaire à } e''_1}$.

ii) Comme g commute avec f, M commute avec A' (matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3)), donc avec $(A')^3 = (S')^3$. $\boxed{M \text{ commute avec } (S')^3}$.

iii) M est de la forme $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$ d'après (i). Alors $M(S')^3 = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 8m_{1,2} & 8m_{1,3} \\ 0 & 8m_{2,2} & 8m_{2,3} \\ 0 & 8m_{3,2} & 8m_{3,3} \end{pmatrix}$ et $(S')^3 M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & 8m_{2,2} & 8m_{2,3} \\ 0 & 8m_{3,2} & 8m_{3,3} \end{pmatrix}$ donc, pour que M commute avec A', il est nécessaire que $m_{1,2} = m_{1,3} = 0$.

Réciproquement, si $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$, alors :

$$MA' = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\, m_{2,3} - m_{2,2} & -\sqrt{3}\, m_{2,2} - m_{2,3} \\ 0 & \sqrt{3}\, m_{3,3} - m_{3,2} & -\sqrt{3}\, m_{3,2} - m_{3,3} \end{pmatrix}$$

et

$$A'M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & -m_{2,2} - \sqrt{3}\, m_{3,2} & -m_{2,3} - \sqrt{3}\, m_{3,3} \\ 0 & \sqrt{3}\, m_{2,2} - m_{3,2} & \sqrt{3}\, m_{2,3} - m_{3,3} \end{pmatrix}$$

donc $A'M = MA' \iff \begin{cases} m_{2,2} = m_{3,3} \\ m_{3,2} = -m_{2,3} \end{cases}$. Finalement,

$\boxed{g \text{ commute avec } f \iff \text{sa matrice dans la base } (e''_1, e''_2, e''_3) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix}}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

c) $\boxed{\mathcal{C}(f) \text{ est de dimension 3}}$ car toute matrice du type précédent est combinaison linéaire de la famille (libre) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.