Exercices sur Maple posés
à la banque PT

Les exercices ci-dessous ont été rapportés par des candidats à leurs professeurs. Les plus expresses réserves sont émises sur leur exactitude ! Mais ils sont cependant fournis au public, dans l'espoir que leur publication sera utile.

Concours ENSAM PT 1997-1998

1

À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a + \dfrac{1}{a} & a^2 + \dfrac{1}{a^2} \\ a + \dfrac{1}{a} & 1 & a + \dfrac{1}{a} \\ a^2 + \dfrac{1}{a^2} & a + \dfrac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable ?
b) Quand A est diagonalisable, trouver P matrice de passage telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (vérifier).

3

(Sous toutes réserves)

Soit :

$$A = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable ?
b) Trouver u, v, w pour que A soit orthogonale.

4

Déterminer les coefficients a, b, c, d et e pour que la fonction f :

$$x \longmapsto f(x) = \mathrm{sh}(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$

soit un infiniment petit d'ordre le plus élévé possible au voisinage de 0. Donner alors un équivalent de f.

5

(Sous toutes réserves)
Montrer l'existence d'un minimum et le calculer pour la fonction :

$$(a,b) \longmapsto \int_1^{+\infty} \left(a\frac{\ln(t)}{t} + \frac{b}{t}\right)^2 dt$$

6

Soient une sphère de centre O, de rayon 1 et un cylindre de centre $\Omega(0, \frac{1}{2}, 0)$, de rayon $\frac{1}{2}$. Γ est l'intersection de la sphère et du cylindre.
a) Paramètrer Γ.
b) Tracer Γ (penser à `plots[spacecurve]`).
c) Longueur de Γ.

7

a) Tracer la courbe :

$$\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = 2t^2 - 3 \end{cases}$$

b) Calculer l'angle des tangentes au point double.

8

(Sous toutes réserves)
Déterminer les zéros du polynome :

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$$

9

Extremums de la fonction :

$$(x, y) \longmapsto xe^y + ye^x$$

10

$u_0 = 1$, $v_0 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
a) Valeur approchée de la limite commune l ?
b) Soit

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

Valeur approchée de $J \times l$? Conjecture ?
(Gauss, adolescent)

11

Soit $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$T_0 = 1, T_1 = X$$

et

$$\forall n \geq 2 : \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

Ecrire une procédure permettant de calculer T_{11}.

12

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver une base orthonormée dans laquelle elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

13

Soit le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_4[X]$.

14

Soit l'équation différentielle

$$x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$$

Donner les solutions ; existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
Montrer qu'il existe un point A tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourantes en ce point.

15

Sachant que

$$\pi = 6\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}$$

utiliser un DSE de la fonction Arcsin permettant d'obtenir un nombre donné de décimales exactes de π.

16

a) Montrer que

$$f : z \longmapsto \frac{z-2i}{z+i}$$

est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
b) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$. Exprimer x et y en fonction de u et v et inversement.
c) Soient

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C}; \Im(z) > \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

Démontrer que la restriction de f à P est une bijection de P sur D.

17

On pose :

$$r^2 = r + 1, a = r, b = r - 1$$

et

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -2 & 1 \\ a & -1 & -b \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

Quelle est la nature de la transformation géométrique associée à A?

18

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & d \\ e & f & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer a, b, c, d, e et f pour que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres.

19

Déterminer les zéros de

$$P = X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X - 1$$

Décomposer P en facteurs irréductibles.

20

Réduire dans une base orthonormale la forme quadratique :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2xz + 2yz$$

21

$$P(X) = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + X + b$$

Donner les valeurs de a et b pour que $2 + 2i$ soit racine. Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

22

Image du cercle unité par l'application

$$z \longmapsto \frac{2+i}{z+1}$$

23

On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_7[X]$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{10} P\left(\frac{k}{10}\right) Q\left(\frac{k}{10}\right)$$

Projection orthogonale sur $\mathbb{R}_3[X]$ de $12X^7 + 5X^6 + X + 1$? Tracer les graphes des fonctions correspondantes.

24

Trouver a, b, c tels que le polynôme

$$X^6 + \sqrt{2}X^5 + aX^2 + bX + c$$

ait un zéro d'ordre ≥ 4.

25

Soient $n > 1$ et $k \geq 1$ deux entiers, et

$$A_{n,k} = \left((n\,(i-1)+j)^k\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

On admet que

$$\forall k, \exists n, \det A_{n,k} = 0$$

et on note

$$N_k = \min\{n \;/\; \det A_{n,k} = 0\}$$

Calculer N_k pour $k \in \{1, \ldots, 5\}$. Conjecturer une formule pour N_k. Déterminer un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} A_{n,k}$. Que resterait-il à faire pour prouver la conjecture?

26

Soit
$$f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$
Calculer Δf. Déterminer toutes les fonctions F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\Delta f = 0$ puis la fonction F telle que
$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \end{cases}$$

27

Trouver le polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 7$ et $P(8) = -2$ soient des extrema locaux. Graphe, calcul de $P(4)$.

28

Soit
$$f(x,y,z) = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$
Trouver les fonctions F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\Delta f = 0$ hors de $(0,0,0)$.

29

On pose $OM_0 = a > 0$ et
$$f(M) = \frac{OM^2 - OM_0^2}{M_0M^3}$$
Calculer Δf et $\displaystyle\iiint f(M)\,dM$ sur $B(O,a)$.

30

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme
$$4X^4 - 16X^3 + 21X^2 + 28X - 49$$

31

Centre et rayon de la sphère passant par les points de coordonnées $(1,2,3)$, $(-3,4,5)$, $(3,-4,5)$ et $(-3,4,-5)$. Trouver tous les points à coordonnées entières de cette sphère (on pourra utiliser le booléen `type(d,square)`).

32

Branches infinies, points doubles de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t^2-4} \\ y = \dfrac{t^2-3}{t+2} \end{cases}$$

33

Etude, nature et paramètres de la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$$

34

CNS sur a pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

ait toutes ses valeurs propres strictement positives.

35

Déterminer l'ensemble de toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant $(1,2,3)$ comme vecteur propre et laissant globalement invariant le plan P d'équation $x+y+z=0$.

36

Branches infinies, points doubles, convexité de

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^3}{u^2-9} \\ y = \dfrac{u(u-2)}{u-3} \end{cases}$$

37

Résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x - K\omega^2 y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y - K\omega^2 x = 0 \\ x(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

et tracer les graphes pour $K = 0,5$ et $\omega = 10$.

38

Minimum de

$$(a,b) \longmapsto \int_0^1 (\mathrm{sh} x - ax - b)^2 \, dx$$

39

Trouver m tel que les droites

$$\begin{cases} x = \dfrac{z}{m} + m \\ y = -2z + 3 - m \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = \dfrac{-z}{2m} - m + \dfrac{1}{2m} \\ y = -\dfrac{z}{2} - m + 3 \end{cases}$$

soient coplanaires.

40

Trouver k tel que le polynôme

$$X^4 - X^3 + kX^2 + 6X - 4$$

ait deux zéros de produit égal à 2.

41

Calculer A^n avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(voir aussi le numéro 78).

42

Etude graphique de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2} \end{cases}$$

43

Pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$$

sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$, puis calculer la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_4[X]$ de la fonction

$$x \longmapsto 1 - |2x - 1|$$

Tracer les graphes des fonctions correspondantes.

44

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans une base indépendante de a, b et c, qu'elle est inversible puis calculer A^n.

45

Soit f la fonction paire 2-périodique coïncidant avec la fonction $x \longmapsto x^7$ sur $[0,1]$. Calculer les coefficients de Fourier de f, écrire la $5^{ème}$ somme partielle, tracer f et la $30^{ème}$ somme partielle.

46

Choisir a, b, c, d, e et f pour que

$$\operatorname{sh} x - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{d + ex^2 + fx^4}$$

soit un infiniment petit d'ordre maximum en 0.

47

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_6[X]$ échelonnée en degré et trouver P dans $\mathbb{R}_6[X]$ tel que $\left\| P - X^7 \right\|$ soit minimum.

48

Soient E un espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E et x un vecteur de E tels que la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leq i \leq n-1}$ soit une base de E.
a) Matrice de f dans cette base ?
b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est $\mathrm{Vect}(f^i)_{0 \leq i \leq n-1}$.
On traitera cet exercice pour $n = 6$.

49

Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y fonction de la variable x :

$$|x|y' + (x-1)y = x^3$$

a) Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}^*$.
b) Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$, solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$.
c) Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.
d) Illustrations graphiques.

50

Soit f paire, 2π-périodique, coïncidant avec la fonction $x \longmapsto x^3$ sur $[0, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier, écrire la $5^{ème}$ somme partielle. Tracer f et la $30^{ème}$ somme partielle. Trouver n tel que la somme partielle de Parseval soit une valeur approchée du carré de la valeur efficace de f à moins de $0,01\%$ près.

51

Etudier suivant les valeurs du paramètre a les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de

$$\begin{pmatrix} 10-a & -a+7 & 1 \\ -8+a & -5+a & -1 \\ -6+a & a-7 & 3 \end{pmatrix}$$

Concours ENSAM PT 1998-1999

52

(Sans plus de précisions)
Intégration d'une équation différentielle non linéaire du troisième ordre (dessin des courbes intégrales, dessin d'une courbe intégrale avec conditions initiales).

53

Soit f la fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui à z associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

a) Donner l'image par f du cercle de centre O et de rayon R.
b) Donner l'image par f de la demi-droite partant de O et d'angle polaire θ.

54

Enveloppe de la famille de droites :

$$\sin(t)x - \cos^2(t)y + \sin^2(t) = 0$$

Points stationnaires de l'enveloppe.

55

Résoudre approximativement, par la méthode d'Euler, l'équation différentielle sur $[0,1]$:

$$y'' + 3y' + 2y = e^t$$

Donner les valeurs de y pour les pas $h = 0,1$ et $h = 0,05$.

56

(Sans plus de précisions)
Décrire la conique passant par les cinq points A, B, C, D, E (les coordonnées étaient évidemment données numériquement).

57

Étudier les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 12x - 12y$$

58

Étude de la série :

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{\sqrt{n}} x^n$$

a) Rayon de convergence de S.
b) Donner une valeur de N pour que :

$$S_N(x) = \sum_{0 \leq n \leq N} 2^{\sqrt{n}} x^n$$

soit une valeur approchée de $S(x)$ à 10^{-8} près pour tout $x \in [-1/3, 1/3]$.
c) Graphe de $x \longmapsto S_N(x)$ pour $x \in [-1/3, 1/3]$.

59

Soit A la matrice carrée de dimension 5 telle que
$a_{ij} = 2$ si $i = j$,
$a_{ij} = 1$ si $i \neq j$.
Calculer A^n.

60

(Sans plus de précisions)
Résoudre une équation différentielle du premier ordre ($(x+1)$ en facteur de y'). Tracer les courbes intégrales. Montrer qu'il existe une solution définie sur $\mathbb{R}$. Calculer la limite de la fonction solution quand x tend vers -1.

61

Soient A B des matrices à 3 lignes et 3 colonnes. On définit $[A, B] = AB - BA$. Montrer que :

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

62

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\tan x} + \frac{cx}{\cos x} + \frac{d}{x}$$

avec $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$.
Trouver a, b, c et d tels que f soit prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement soit d'ordre le plus élevé possible. On vérifiera que l'ensemble solution est une droite vectorielle.

63

Soit f la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
a) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
b) Montrer que l'on peut choisir a, b et c pour que la série de Fourier de f soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Représenter alors le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.
c) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

64

Trouver toutes les fonctions $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \phi\left(x^2 + y^2\right)$$

vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3y\frac{\partial f}{\partial x} = xyf(x, y)$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

65

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| = |b| = 1$ et $a \neq b$ et $a \neq -b$.
a) Montrer que
$$\frac{1+ab}{a+b}$$
est un réel.
b) Montrer que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$$
est un imaginaire pur.

66

Calculer le reste de la division euclidienne de :
$$x^n + 2x^m + 1$$
par
$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$
n et m étant deux entiers naturels.
Vérifier le résultat pour $n = 43$ et $m = 100$.
Question de cours : division euclidienne.

67

Soit :
$$P = x^4 + x^3 + \sqrt{2}x^2 + ax + b$$
ou bien
$$P = x^4 + x^3 + ax^2 + \sqrt{2}x + b$$
(l'élève ne sait plus).
a) Sachant que $1+i$ est zéro de P, déterminer les réels a et b. Calculer alors les zéros de P.
b) Factoriser P dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

68

Résoudre le système
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s_1}{dt^2} - kw^2 s_2 = 0 \\ \dfrac{d^2 s_2}{dt^2} + kw^2 s_1 = 0 \end{cases}$$
Représenter graphiquement la solution avec $k = 0,5$ et $w = 2$.

69

Trouver une condition sur a pour que

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

ait des valeurs propres strictement positives.
(*L'élève n'est plus très sûr de l' énoncé*).

70

Soit

$$u_n = \sin\left(\frac{a}{\sqrt{n+b}}\right) - \tan\left(\frac{c}{\sqrt{n+d}}\right)$$

Condition pour que la série de terme général u_n converge. Déterminer a, b, c, d pour que

$$u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$$

avec α le plus grand possible.

71

Soit la matrice carrée d'ordre 5 : $A = (a_{ij})$ définie par $a_{ii} = 2$ et $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$. Calculer A^n.

72

Résoudre

$$(1 + x^2)y' - 2xy = x^3$$

pour que les courbes intégrales passent par le point $(0, n)$, où $0 \leq n \leq 5$.

73

Résoudre

$$xy' + (1 - x)y = \frac{xe^x}{x^4 + 1}$$

Tracer quelques courbes intégrales. Solutions continues sur $\mathbb{R}$? (*Tombé deux fois !*)

74

Trouver tous les polynômes P tels que

$$(n^6 + 3n^2)^{1/6} - (P(n))^{1/3}$$

soit le terme général d'une série convergente.

75

Soit l'équation différentielle

$$xy'' + (x^4 - 1)y' + xy = x^3$$

avec

$$y(0) = 0$$

Résoudre, tracer quelques courbes, étudier asymptotes et points remarquables (*l'élève n'est plus très sûr de l'énoncé*).

76

Étudier les extrema locaux de

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Concours ENSAM PSI 1998-1999

77

Soient a, b et c trois réels et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'ensemble des matrices M telles que $M^2 = I_3$.
b) Interpréter géométriquement la forme de ces matrices.

78

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer A^n (sans utiliser le copier-coller ni la réécriture de matrice).

Concours ENSAM PT 1999-2000

79

Soit la courbe du plan d'équation $xy = 1$. Soient A et B deux points de cette courbe tels que l'abscisse du point A soit deux fois celle du point B. Déterminer l'enveloppe de la droite (AB).
Faire ensuite la même chose avec l'abscisse de A qui vaut n fois l'abscisse de B et tracer le graphe pour n variant de 1 à 5.

80

On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = xe^{-x}\cos x$.
a) Résoudre l'équation avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On note f cette solution.
b) Vérifier que f est bien solution de l'équation.
c) Tracer le graphe de f sur $[-3, 2]$.
d) Résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$.

81

Soit $P(X) = 4X^4 - 16X^3 + 2X^2 + 28X - 49$.
a) Trouver les zéros de P.
b) Factoriser P sur $\mathbb{R}[X]$.
c) Calculer la somme des cubes des zéros de P. Expliquer pourquoi c'est un entier.

82

Soit $u_n = \cos\left(\pi\left(n^3 + an^2 + bn\right)^{1/3}\right)$. À quelle condition sur a et b, la série de terme général u_n est-elle convergente ?

83

Soit une suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } u_n = 1 \\ u_n/2 \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Écrire une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Écrire une procédure d'arguments n et u_0 donnant u_n.
On conjecture qu'il existe pour tout u_0 un entier n tel que $u_n = 1$; écrire une procédure donnant le nombre d'itérations pour arriver à $u_n = 1$ avec u_0 donné.

84

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a, b et c la dimension de l'espace vectoriel E constitué des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

85

Soit

$$f_a : x \longmapsto \frac{(x^3 + ax - 3)e^{\frac{1}{x}}}{1 + x}$$

et C_a sa courbe représentative. Tracer quelques courbes C_a. Etudier les asymptotes éventuelles.
Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il des courbes C_a passant par ce point ? Donner la courbe C_a passant par $(5, -1)$ et donner une valeur approchée du minimum.

86

On considère la fonction

$$f_a : x \longmapsto \frac{(2ax^2 + x - a)e^{\arctan(x^2 - x + 1)}}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Tracer des courbes pour différentes valeurs de a. Déterminer les deux points communs à toutes les courbes. Étude des branches infinies.

87

Résoudre l'équation différentielle

$$y' - y \tan x + \cos x = 0$$

Étudier et représenter graphiquement la solution vérifiant $y(0) = 0$.
Existe-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}$? continues en $\pi/2$?

88

Soit

$$P = X^3 + aX^2 + aX + 1$$

avec $a \in \mathbb{C}$. Trouver a pour que P ait deux zéros dont la somme soit égale à 1.

89

Trouver (a, b, c) tel que

$$\int \frac{ax^4 + bx^2 + c}{(x-1)^3(x+2)^5}\,dx$$

soit une fraction rationnelle.

90

Trouver le nombre de sphères tangentes au plan d'équation $z = 0$ et passant par $A(1, -2, 1)$, $B(-3, 1, 2)$ et $C(2, 2, 2)$.

91

Soit

$$A_n = t^n + \frac{1}{t^n}$$

Montrer que $A_n = A_1 A_{n-1} - A_{n-2}$ et en déduire que $A_n = P_n(A_1)$ où P_n est un polynôme.
Faire un programme qui calcule P_n.
Calculer et linéariser $P_n(2\cos x)$ pour n variant de 0 à 10. Que peut-on dire ?

92

Trouver (a, b, c) tel que

$$\int \frac{ax^5 + x^4 + bx^3 + cx^2 + x + d}{x\left(x^2+1\right)^2}\,dx$$

soit une fraction rationnelle.

93

Soit

$$P = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + bX$$

Trouver a et b réels afin que $1 + 2i$ soit zéro de P et déterminer les autres *(voir aussi le numéro 21).*

94

Soit la famille de droites

$$(D_t) : x \sin t - y \cos t = \sin^2 t$$

Déterminer et tracer l'enveloppe et étudier ses points stationnaires *(voir aussi le numéro 54)*.

95

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-2au & -2av & -2aw \\ -2bu & 1-2bv & -2bw \\ -2cu & -2cv & 1-2cw \end{pmatrix}$$

avec $au + bv + cw = 1$. Caractériser l'endomorphisme associé et trouver les conditions pour que ce soit une isométrie.

96

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A est inversible [je suppose que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ ...N.d.C.]. Calculer A^n.

97

Soit (E) l'équation différentielle

$$xy' - (x-1)y = e^x$$

Trouver ses solutions, tracer des courbes intégrales et trouver les solutions continues sur $\mathbb{R}$.

98

Matrice de rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe Δ contenant $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$?

99

Chercher a, b et c tels que les primitives de

$$\frac{ax^4+bx^2+c}{(x+1)^3(x-2)^2}$$

soient des fractions rationnelles. Exemple de primitive.
Note : l'examinateur a demandé de refaire l'exercice sans calculer les primitives avec `int`. Interdiction d'utiliser le copier/coller.

100

Conditions sur a et b pour que la matrice A soit diagonalisable ?

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&b&a&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Trouver P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

101

Soient les suites :

$$u_n=2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

et

$$v_n=2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

a) Montrer que les deux suites sont adjacentes.
b) Tracer sur un graphique les deux suites pour n variant de 1 à 100.
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

102

Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&b\\1&c&d\\1&e&f\end{pmatrix}.$$

Soient les vecteurs :

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad w=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer a, b, c, d, e et f pour que u, v et w soient des vecteurs propres de A.

103

$$f(x) = \sin(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$

Déterminer a, b, c, d et e pour que f soit un infiniment petit d'ordre le plus grand possible.

104

Soit l'équation différentielle (E):

$$x(x-1)y' + (x-1)y = x^2 - 1$$

définie pour x dans $]1, +\infty[$.
a) Pourquoi cette équation différentielle est-elle définie sur $]1, +\infty[$?
b) Courbes intégrales.
c) Tracer quelques courbes intégrales.
d) Chercher et tracer la courbe intégrale (C) passant par $A(3, 0)$.
e) Chercher l'abscisse du point de (C) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

105

On considère la famille de courbes (C_t) d'équation :

$$y = txe^x$$

Représenter la courbe Γ engendrée par le centre de courbure en $(0, 0)$ à (C_t).

106

Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t + \cos t} \\ y = \dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} t + \cos t} \end{cases}$$

Tracer (C).
Tracer le graphique du rayon de courbure de (C) en fonction de t.

107

On considère le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

sur l'espace vectoriel des polynômes.
Soit le polynôme $12X^7 + 5X^6 + X + 1$. Déterminer sa projection orthogonale sur le sous-espace $\mathbb{R}_3[X]$.
Représenter graphiquement la solution.
