Oraux CCP 97

1) Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $V_n = U_{2n} - U_n$.

   a) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2} \leqslant V_n \leqslant \frac{n}{n+1}$.

   b) Quelle est la nature des suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

   c) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln \frac{n+1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

   d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n \leqslant \ln 2 \leqslant V_n + \frac{1}{2n}$.

2) a) Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : P \longmapsto Q$ avec $Q = X^2P'' - (X+1)P' - 3P$.

   i) Montrer que f est un endomorphisme de E.

   ii) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

   iii) A-t-on $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$?

   b) Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $g : P \longmapsto Q$ avec $Q = X^2P'' + (1-a-b)XP' + abP$. g est-il un endomorphisme de E ? Est-il injectif ?

   Préciser $\operatorname{Ker} g$.

3) Soit $f : (x,y) \longmapsto \frac{y}{x^2+a^2}$. Calculer l'intégrale de f sur le domaine $D : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

4) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f \circ f = 0$ et $f \circ f \neq 0$. Montrer qu'il existe x_0 tel que la famille $(x_0, f(x_0), f \circ f(x_0))$ soit une base de E. Quelle est la matrice A de f dans cette base ?

   Montrer que : $f \circ g = g \circ f \iff g \in \operatorname{Vect}(\mathrm{Id}, f, f \circ f)$.

5) Nature de $I = \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin \frac{1}{x}\right) dx$ et de $J = \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx$.

6) Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(xt)\, dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.

7) Etudier et tracer la courbe définie en polaires par l'équation $r = \sin t - \tan \frac{t}{2}$. Calculer l'aire de la boucle.

8) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t \cos x}$. Etudier F et tracer son graphe.

9) Soit f impaire, 2π-périodique, valant $\frac{\pi}{4}$ sur $]0, \pi[$.

   a) Déterminer la série de Fourier de f. Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de cette série.

   b) Montrer que $S_n(x) = \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\, dt$.

   c) Déterminer la plus petite valeur $x(n)$ strictement positive pour laquelle S_n présente un maximum relatif noté $y(n)$.

   d) Etablir : $\forall t > 0 \quad \frac{\sin t}{t} \geqslant 1 - \frac{t^2}{6}$. En déduire : $y(n) > \frac{\pi}{4}$.

10) On pose $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z = 1\}$. Calculer la valeur de $\max_{(x,y,z)\in K} xyz$. Interpréter géométriquement.

    Montrer que pour tous x, y, z positifs ou nuls, $(xyz)^{1/3} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$. Quels sont les cas d'égalité ?

11) On cherche les polynômes P tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt$.

a) Montrer que si P est solution, alors P' l'est aussi.

b) Montrer qu'un polynôme de degré 2 ne peut être solution.

c) Quelles sont les solutions ?

12) a) Résoudre : $xy'' + (2-x)y' - y = 0$ en posant $u(x) = xy(x)$.

b) Quelles sont les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

c) Quelles sont les solutions développables en série entière ?

13) Convergence et somme de la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{4n-3}{6}\pi\right)$ $(n \geqslant 1)$.

14) Une machine fonctionne avec deux combustibles x et y (dont les consommations sont exprimées en m^3). Sa puissance est proportionnelle à $\dfrac{x}{(x+1)^2}$ et $\dfrac{y}{(y+1)^2}$, soit $P = \dfrac{Kxy}{(x+1)^2(y+1)^2}$.

a) Calculer les valeurs de x et y pour que la puissance soit maximale.

b) Les produits x et y valent 500 francs le m^3. Calculer (x, y) pour que le rapport puissance/prix soit maximal.

15) On considère une réaction chimique qui transforme deux produits A et B en AB avec une constante K_2 (et réciproquement avec une constante K_1). On note $[A](t)$, $[B](t)$ et $[AB](t)$ les concentrations des trois produits à l'instant t.

On a : $\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = K_1[AB] - K_2[A][B] \\ \dfrac{d[AB]}{dt} = -K_1[AB] + K_2[A][B] \\ \dfrac{d[B]}{dt} = K_1[AB] - K_2[A][B] \end{cases}$ avec les conditions $[A](0) = A_0$, $[B](0) = B_0$ et $[AB](0) = X_0$.

a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t) = [AB](t)$.

b) On choisit $X_0 = 0$, $A_0 = \dfrac{B_0}{2}$, $K_1 = 2K_2A_0$. Trouver les concentrations à l'équilibre.

c) Résoudre l'équation en $x(t)$.

16) Soit f une fonction de classe C^2 en la variable $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Soit V le volume compris entre les sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$. Démontrer que

$$\iiint_V \Delta f\,dx\,dy\,dz = 4\pi\left[R_2^2 f'(R_2) - R_1^2 f'(R_1)\right]$$

où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

On utilisera deux méthodes :

- la formule d'Ostrogradski,
- l'expression de Δf en coordonnées sphériques.

17) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n \tan x\,dx$.

Oraux CCP 98

1) Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$ pour tout $x>0$.

   a) Etudier l'existence de $f(x)$.

   b) Etablir : $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}k!}{x^k}+R_n(x)$. Que vaut $R_n(x)$?

   c) Calculer $f(100)$ à 10^{-6} près.

2) Soient $U_n(x)=\ln n\, x^n$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}U_n(x)$.

   a) Quel est le domaine de définition de f ?

   b) Soit $g(x)=-x+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^n$. Quel est le domaine de définition de g ?

   c) Quelle relation simple lie f et g ?

3) Soit (S) la surface d'équation $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}=a^2$ avec $z\geqslant 0$. Soit $\vec{A}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ xyz\end{pmatrix}$ un potentiel vecteur de $\vec{B}$.

   Calculer le flux de $\vec{B}$ à travers (S).

4) On considère la suite définie par : $S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$.

   a) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît.

   b) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite S.

   c) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0^+)=m$. Donner la définition de m à l'aide de quantificateurs.

   Soit $T_n(f)=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}f\left(\frac{1}{k}\right)$. Montrer que $T_n(f)$ tend vers mS quand n tend vers $+\infty$.

   d) Soit $f(x)=\ln(1+x)$. Calculer la limite de $T_n(f)$. En déduire S.

5) Soit M une matrice antisymétrique. $M+I$ est-elle inversible ?

6) Soit $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}x^n\,dx$ pour $n\in\mathbb{N}$. On admet que $I_0=\sqrt{\pi}$.

   a) Etudier la convergence de I_n.

   b) Calculer I_n.

   c) Soit $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\cos x\,dx$. Quelle est sa nature ?

   d) Soient $T_n(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$ et $J_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}T_n(x)\,dx$. Vérifier que $|J-J_n|<\dfrac{I_{2n+2}}{(2n+2)!}$.

   e) En déduire la valeur de J.

7) a) Soit $g(x)=-x^5-x$.

      i) Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

      ii) Montrer l'existence de f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^5(x)+f(x)+x=0$.

      iii) Exprimer f' à l'aide de f.

      iv) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

v) Tracer le graphe de f.

b) Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^3(x) - 3f(x) = x$.

8) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, x_0]$, telle que $f > 0$, $f' < 0$, $f(0) = 1$ et vérifiant (1) : $1 - f(x) = \sqrt{-2\int_0^x \frac{y^2 f'(y)}{f(y)}\, dy}$.

   a) On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et C tels que $1 - f(x)$soit équivalent à Cx^n quand x tend vers 0^+. Quelles sont les valeurs possibles pour n et C ?

   b) En dérivant (1), trouver f. Quelle est la valeur maximale de x_0 ?

   c) Tracer le graphe de f.

9) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt$, pour tout $x > 0$.

   a) Montrer que f décroît.

   b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^0$ et dérivable.

   c) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0^+.

   d) Donner un équivalent de f en $+\infty$. Continuer le développement limité de f en $+\infty$.

10) Soit la série de terme général $U_n = \sqrt[4]{n^4 + 2n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme indéterminé.

    Déterminer tous les polynômes P pour lesquels la série converge.

    Donner alors un équivalent de U_n.

11) Déterminer tous les endomorphismes f d'un espace vectoriel E de dimension 3 tels que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.